TD n$^{\text{o}}$ 19 : Couples de variables aléatoires

Exercice 1. *Loi du carré*
Soit X une variable aléatoire de loi donnée par

x	-2	-1	0	1	2
$P(X=x)$	$1/6$	$1/4$	$1/6$	$1/4$	$1/6$

Déterminer la loi de $Y = X^2$.

Exercice 2. *Loi couple avec et sans remise*
Une urne contient trois boules blanches et quatre boules noires. On tire successivement deux boules de cette urne. On définit les variables aléatoires X_1 (respectivement X_2) par X_1 vaut 0 si la première (resp. la deuxième) boule tirée est noire et 1 si elle est blanche.

1. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2) dans le cas où les tirages ont lieu avec remise.
2. Même question avec des tirages sans remise.

Exercice 3. *Loi couple et loi marginale*
Une urne contient 2 boules rouges et $n-2$ boules vertes. On effectue n tirages successifs sans remise dans cette urne. On note X le rang de sortie de la première boule rouge et Y celui de la seconde.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. En déduire celle de Y.

Exercice 4. *Loi conditionnelle*
On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n ; la boîte numéro k contenant k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte puis on tire une boule dans ladite boîte. On note X le numéro de la boîte choisie et Y celui de la boule tirée.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Soit $i \in X(\Omega)$. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(X = i)$.
3. Calculer l'espérance de Y.

Exercice 5. *Lois marginales et indépendance*
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et (X, Y) un couple suivant la loi uniforme sur $[\![1\,;n]\!]^2$.

1. Déterminer la loi de X et celle de Y.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 6. *Somme de deux lois binomiales*
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois binomiales $\mathscr{B}(n,p)$ et $\mathscr{B}(m,p)$.
Montrer que $X+Y$ suit une loi binomiale $\mathscr{B}(m+n,p)$.
(*On admettra que* $\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$.)

Exercice 7. *Un peu de tout*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère deux variables aléatoires X et Y sur $[\![1\,;n]\!]$ vérifiant $\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, $P(X = i \cap Y = j) = \alpha i j$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer la valeur de α.
2. Déterminer la loi de X puis calculer l'espérance de X.
3. Calculer $P(X = Y)$.
4. Montrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
5. Soit $M = \max(X, Y)$. Calculer pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $P(M \leqslant k)$ puis en déduire la loi de M.

Exercice 8. *Vérification covariance nulle*
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes dont les lois sont données par

x	1	2
$P(X=x)$	0,7	0,3

et

y	-2	5	8
$P(Y=y)$	0,3	0,5	0,2

1. Calculer la loi conjointe de X et Y.
2. Calculer l'espérance de X, Y et XY puis vérifier que $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$.

Exercice 9. *Indépendance et covariance*
On reprend la situation de l'exercice 1.

1. Les variables aléatoires X et Y sont-elle indépendantes ?
2. Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$. Commenter.

Exercice 10. *Calculs variés*
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois uniformes sur $[\![1\,;n]\!]$.

1. Calculer $P(X=Y)$ et $P(X \leqslant Y)$.
2. Déterminer la loi de $Z = X+Y$.
3. Calculer l'espérance de Z et celle de XY.
4. Les variables aléatoires X et Z sont-elles indépendantes ?
5. Déterminer la loi de $M = \max(X,Y)$.

Exercice 11. *Dénombrement*
Une urne contient deux boules blanches, trois boules rouges et quatre boules bleues. On tire trois boules de l'urne. On note X le nombre de boules blanches tirées et Y le nombre de boules rouges tirées.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y).
2. Déterminer les lois marginales.
3. Déterminer la loi de $S = X+Y$ et de $P = XY$.
4. Calculer la covariance de X et Y.

Exercice 12. *Variance et covariance*
À un péage d'autoroute, n voitures franchissent de façon équiprobable et indépendante l'une des trois barrières. On note X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires dénombrant les voitures franchissant chacune des trois barrières.

1. Déterminer les lois de X_1, X_2 et X_3.
2. Calculer les variances de X_1, X_2 et X_1+X_2.
3. En déduire la covariance de X_1 et X_2.

Exercice 13. *Loi faible des grands nombres*
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi d'espérance finie m et de variance finie v. On note $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

1. Donner $E\left(\dfrac{S_n}{n}\right)$ et $V\left(\dfrac{S_n}{n}\right)$.
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$.
3. On se place dans le cas où, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ avec $p \in [0\,;1]$. Que représente $\dfrac{S_n}{n}$? Interpréter alors le résultat de la question précédente.

Exercice 14. ★ *Covariance et indépendance*
Soit X la variable aléatoire égale au nombre quotidien de clients entrant dans une boulangerie. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque client a une probabilité $p \in]0\,;1[$ d'acheter des croissants. Sur une journée, on note Y le nombre de clients ayant acheté des croissants et Z le nombre de ceux n'en ayant pas achetés.
On admet que $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda p)$ et $Z \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda(1-p))$.

1. Calculer la covariance de Y et Z.
2. Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 15. ★ *Deux tirages sans remise*
Un sac contient $n \in \mathbb{N}^*$ jetons numérotés de 1 à n. On tire successivement et sans remise deux jetons. On note X le numéro du premier jeton tiré et Y celui du second.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y), celle de X et celle de Y.
2. Calculer la covariance de X et Y.
3. Déterminer la loi de $Z = |X-Y|$.