

TD n° 10 : Séries entières

Exercice 1. Premier rayon de convergence

On considère la série entière $\sum \frac{z^n}{n}$.

1. Étudier sa convergence pour $z = 1$. Que peut-on en déduire concernant le rayon de convergence ?
2. Étudier sa convergence pour $z = -1$. Que peut-on en déduire concernant le rayon de convergence ?

Exercice 2. Plein de rayons de convergence

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

- | | | |
|---|---|---------------------------------|
| a) $\sum n e^n z^n$ | b) $\sum \frac{n-3}{n^2+1} (3z)^n$ | c) $\sum e^{-n^2} z^n$ |
| d) $\sum (-1)^n \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}$ | e) $\sum n! z^n$ | f) $\sum \frac{n^n}{n!} z^{3n}$ |
| g) $\sum \binom{2n}{n} z^{4n}$ | h) $\sum \frac{(1+i)^n}{n 2^n} z^{3n}$ | i) $\sum \arctan(n) z^n$ |
| j) $\sum a_n z^n$ où $a_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ | k) $\sum \sin\left(\frac{2}{3^n}\right) z^{2n}$ | |
| l) $\sum \lfloor \pi^n \rfloor z^n$ | m) $\sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} z^n$ | |

Exercice 3. Par encadrement

Grâce à un encadrement de $n^{(-1)^n}$, déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum n^{(-1)^n} x^n$.

Exercice 4. Premiers calculs de sommes

Déterminer le rayon de convergence puis calculer la somme des séries entières réelles suivantes.

- | | | |
|------------------------------|---|---|
| a) $\sum_{n \geq 0} n^2 x^n$ | b) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ | c) $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}$ |
|------------------------------|---|---|

Exercice 5. Développements en série entière

Développer en série entière les fonctions suivantes en précisant le domaine de validité.

- | | |
|--------------------------------|---|
| a) $f(x) = 3^x$ | b) $g(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ |
| c) $h(x) = \frac{1+x}{1-x}$ | d) $i(x) = \sin^2(x)$ |
| e) $k(x) = \frac{1}{2-3x+x^2}$ | f) $\ell(x) = \ln(1+x+x^2)$ |
| g) $m(x) = \arcsin x$ | h) $n(x) = \arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ |

Exercice 6. Autres calculs de sommes

Déterminer le rayon de convergence puis la somme des séries entières réelles suivantes.

- | | | |
|---|--|---|
| a) $\sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{n!} x^n$ | b) $\sum_{n \geq 0} \frac{n+2}{n+1} x^n$ | c) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{2n}$ |
|---|--|---|

Exercice 7. Sommes de séries numériques

1. En utilisant le développement en série entière de $\ln(1-x)$, montrer que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k 2^k} = \ln(2).$$

2. Justifier la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{3^n}$.

Exercice 8. ★ Encore une somme

Déterminer le rayon de convergence puis calculer la somme de la série entière

$$\sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n^2 - 1}.$$

Exercice 9. ★ Fonction $\mathcal{C}^\infty$

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \frac{1}{2}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer, pour tout entier naturel n , la valeur de $f^{(n)}(0)$.

Exercice 10. ★ Oral Centrale 2023

On définit la fonction f par

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

1. Tracer l'allure de f .
2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x}\right).$$

4. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que f n'est pas développable en série entière autour de 0.
6. Qu'a-t-on démontré ?

Exercice 11. Une égalité

Montrer que $\int_0^1 e^{t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)n!}$.

Exercice 12. Une équation différentielle (d'après ATS 2020)

On considère l'équation différentielle $y'' + xy' + y = 1$. On admet qu'il existe une unique solution sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$. Cet exercice a pour but de déterminer cette solution.

1. On suppose qu'il existe une série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ solution de ce problème de Cauchy.
 - a) Justifier que f est deux fois dérivable sur $] -R; R[$ puis exprimer $f'(x)$ et $f''(x)$ à l'aide d'une série.

b) À l'aide des conditions initiales, déterminer les valeurs de a_0 et a_1 .

c) Montrer que pour tout $x \in] -R; R[$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)[(n+2)a_{n+2} + a_n]x^n = 1.$$

d) À l'aide de la question précédente, montrer que

$$a_2 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad a_{n+2} = \frac{-1}{n+2} a_n.$$

e) Par récurrence, montrer que $\forall p \geq 1, a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \frac{(-1)^{p+1}}{2^p p!}$.

2. Quel est le rayon de convergence de la série entière ainsi obtenue ?
3. Exprimer cette série entière à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 13. ★ Exponentielle complexe

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z| e^{|z|}$.