# TD n$^{\text{o}}$ 24 : préparation aux oraux

*Certains exercices vus en TD/DM/DS cette année sont aussi de bonnes révisions. Par exemple, les exercices 13 du TD8 et 5 du TD16 sont tombés à l'oral de CCP en 2019. De même, l'exercice 3 du DM2 (directement questions 4-5-6) et le début de l'exercice 15 du TD19 sont tombés à l'oral de Centrale en 2023.*

CCP **Exercice 1.** *Concours ATS / OdlT 2018-282*

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^2 + \bar{z} - 1 = 0$ et $z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0$.

CCP **Exercice 2.** *Récolte CCINP 2023 - Simon*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = nx + \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$.

1. Justifier que $f_n$ est de classe $\mathcal{C}^2$ puis montrer que $f''(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 0$.
2. En déduire les variations de $f_n$ et préciser les limites.
3. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. Pour la suite, on la note $x_n$.
4. Montrer que $\dfrac{-1}{n} < x_n < 0$ et en déduire la convergence de la suite $(x_n)$.
5. Montrer que $x \sim \dfrac{-1}{2n}$ et en déduire la nature de la série $\sum x_n$.

CCP **Exercice 3.**

On considère le système différentiel sur $\mathbb{R}_+$ suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = 1 - 2x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) \\ z'(t) = x(t) - z(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases}.$$

1. Déterminer $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(x(t) + y(t) + z(t)\Big)$ puis, à l'aide des conditions initiales, en déduire que $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $y(t) + z(t) = 1 + t - x(t)$.
2. Montrer que $x$ est solution de l'équation différentielle $(E)$ : $u'(t) + 3u(t) = 2 + t$.
3. Résoudre $(E)$. *Indication : on cherchera une solution particulière sous forme affine.*
4. Déterminer $x$, l'unique solution de $(E)$ telle que $x(0) = 1$.
5. Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(y(t) - z(t)\Big) + y(t) - z(t) = 0$ et en déduire que $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $y(t) = z(t)$.
6. Déduire des questions précédentes, les expressions de $y(t)$ et $z(t)$ en fonction de $t$.

CCP **Exercice 4.** *CCINP 2021 / BEOS 6519*

Soit la courbe paramétrée sur $\mathbb{R}^*$ par $\begin{cases} x(t) = (t-1)\ln|t|, \\ y(t) = (t+1)\ln|t|. \end{cases}$

1. Calculer $x(-t)$ et $y(-t)$. En déduire que la courbe admet une symétrie par rapport à une droite dont on donnera l'équation et qu'on peut alors limiter l'étude à $]0\,;+\infty[$.
2. On note $\Gamma_0$ la courbe sur $]0\,;+\infty[$ et $\Gamma_1$ la courbe sur $]-\infty\,;0[$.
   Écrire une fonction Python permettant de tracer $\Gamma_0$ et $\Gamma_1$.
3. Réaliser un tableau de variation des fonctions $x$ et $y$ sur $]0\,;+\infty[$.
4. Donner les DL de $x(t)$ et $y(t)$ à l'ordre 3 en $t = 1$.

CCP **Exercice 5.** *IMT PSI / OdlT 2018-260*

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

CCP **Exercice 6.** *CCP banque MP 96 moins détaillé*

On admet que, pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k \geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et $\forall x \in \,]-1\,;1[$, $\displaystyle\sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$.

Soient $p \in \,]0\,;1[$ et $r \in \mathbb{N}^*$.

On dépose une bactérie dans une enceinte fermée à l'instant $t = 0$ (le temps est exprimé en secondes). On envoie un rayon laser par seconde dans cette enceinte, le premier étant envoyé à l'instant $t = 1$. Les tirs de lasers sont indépendants.

La bactérie a la probabilité $p$ d'être touchée par le rayon laser et elle ne meurt que lorsqu'elle a été touchée $r$ fois par le rayon laser.

Soit $X$ la variable aléatoire égale à la durée de vie de la bactérie.

1. On suppose dans cette question seulement que $r = 1$.
   Quelle est la loi de $X$ ? Rappeler son espérance et sa variance.
2. Cas général : $r \in \mathbb{N}^*$.
   a) Déterminer la loi de $X$.
   b) Prouver que $X$ admet une espérance et la calculer.

CCP **Exercice 7.** *CCP TSI / OdlT 2019-269*

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{-x}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $f$ est définie sur $]-\infty\,;1[$ puis calculer $f(0)$.
2. Déterminer le sens de variation de $f$.
3. Montrer que $\forall x \in \,]-\infty\,;1[$, $0 \leqslant \dfrac{1}{1-x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{1-x}$.
4. En déduire les limites de $f$ aux bornes de son intervalle de définition.

CCP **Exercice 8.** *CCP banque MP 107 moins détaillé*

On dispose de deux urnes $U_1$ et $U_2$. L'urne $U_1$ contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne $U_2$ contient quatre boules blanches et trois boules noires.

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :

- on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie ;
- on note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient ;
- si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne $U_1$. Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne $U_2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $B_n$ l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer $p_1$.
2. À l'aide de la formule des probabilité totales, prouver que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+1} = \frac{4}{7} - \frac{6}{35}p_n.$$
3. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = \dfrac{4}{7} - \dfrac{6}{35}\alpha$.
4. On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_n = p_n - \alpha$. Montrer que $(u_n)$ est géométrique et en déduire l'expression de $u_n$ puis de $p_n$ en fonction de $n$.

CCP **Exercice 9.** *Récolte CCP 2019 - Théo*

Soient $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi+t)^2\sin^2(t)}$ et $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi)^2\sin^2(t)}$.

1. Montrer que $\forall t \in [0\,;\pi]$, $\sin t \leqslant t$.
2. Montrer que $a_n \geqslant \dfrac{\arctan(n\pi^2)}{n\pi}$.
3. Montrer que $a_{n+1} \leqslant u_n \leqslant a_n$.
4. Quelle est la nature de la série de terme général $u_n$ ?

CCP **Exercice 10.** *Récolte CCP 2019 - Théo*

1. a) Rappeler le théorème de d'Alembert-Gauss.
   b) Déterminer les polynômes $Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que $Q(X) = Q(X+1)$.
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $(X+4)P(X) = XP(X+1)$.
   a) Trouver quatre racines distinctes de $P$.
   b) Déterminer tous les polynômes $P$ vérifiant la relation précédente.

CCP **Exercice 11.** *CCINP 2023 / BEOS 7888*

On dispose de deux urnes. Dans la première, il y a $n$ boules, numérotées de 1 à $n$. On réalise dedans un tirage et on note $X$ le numéro ainsi tiré.

Dans la deuxième urne, si l'on a tiré la boule numéro $k$ au premier tirage, on dispose une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2, etc. jusqu'à $k$ boules numérotées $k$. On réalise alors un deuxième tirage dans cette urne et on note $Y$ le numéro de la boule ainsi tirée.

1. Reconnaître la loi de $X$. Donner son espérance et sa variance.
2. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, donner la loi de $Y$ conditionnellement à l'événement $[X = k]$.
3. Déterminer la loi de $Y$.
4. Justifier que $Y$ admet une espérance puis montrer que $E(Y) = \dfrac{n+2}{3}$. *On admettra pour cela que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
5. Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?
6. Écrire une fonction `simulation(n)` renvoyant une réalisation de $Y$. On pourra écrire une fonction `urne(k)` renvoyant l'urne du second tirage lorsque l'on a obtenu $k$ au premier tirage.

CCP **Exercice 12.** *CCP TSI / OdlT 2018-281*

Soient $g$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $f$ définie par

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Développer $\sin(x-t)$ puis montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que $f$ est solution de $y'' + y = g$.
3. Dans le cas $g(t) = \mathrm{e}^t$, résoudre cette équation différentielle.

CCS **Exercice 13.** *Récolte CCS 2019 - Tino*

Soit $F\colon \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \end{array}$.

1. Montrer que $F$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Diagonaliser $F$.
3. Quelle est la nature de $F$ ? On précisera les éléments caractéristiques.

CCS **Exercice 14.** *Centrale 2023 / BEOS 7886*

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. La matrice $A$ est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
2. Montrer que $A$ est semblable à $T$.
3. Calculer les puissances de $A$.

CCS **Exercice 15.** *Groupe Cachan PT / OdlT 2018-262*

Soit $u$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ vérifiant $u^2 + u - 6\mathrm{id} = 0$ avec $u \neq 2\mathrm{id}$ et $u \neq -3\mathrm{id}$.

1. Montrer que $u$ est un automorphisme et exprimer $u^{-1}$ en fonction de $u$ et id.
2. On note $F = \mathrm{Vect}\{u^k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Déterminer $\dim(F)$.

CCP **Exercice 16.** *CCP PSI moins détaillé / OdlT 2018-202*

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 \in ]0\,;\frac{\pi}{2}[$ et $u_{n+1} = \sin u_n$.

1. Justifier que pour tout $x \geqslant 0$, $\sin x \leqslant x$.
2. Montrer que $(u_n)$ est décroissante et bornée.
3. En déduire que $(u_n)$ est convergente et déterminer sa limite.
4. En calculant $u_{n+1} - u_n$, montrer que $\sum u_n^3$ converge.
5. Quelle est la nature de $\sum u_n^2$ ? (On pourra s'intéresser à $\ln u_{n+1} - \ln u_n$.)

CCP **Exercice 17.** *ENSAM PSI / OdlT 2018-251*

1. Donner le rayon de convergence de $f(x) = \sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.
2. Montrer que $f$ vérifie l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 1$.
3. En déduire une expression de $f$ à l'aide des fonctions usuelles.

CCP **Exercice 18.** *ENSAM PSI / OdlT 2018-253*

Soient $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $u$ l'endomorphisme canoniquement associé à $M$.

1. Donner le rang de $M$, son noyau et son image.
2. Déterminer une base orthogonale du noyau et de l'image puis montrer que ces deux espaces sont orthogonaux.
3. Diagonaliser $M$. Justifier que $u$ est un projecteur.
4. Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à $\operatorname{Im} u$.

CCS **Exercice 19.** *CCP PSI / OdlT 2018-210*

1. Étudier la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{(\ln n)^{2018}}{n^\alpha}$ en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Étudier la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{n \ln n}$.

CCS **Exercice 20.** *Groupe Cachan PT / OdlT 2018-263*

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B_a = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

1. Sans calcul, justifier que $A$ est diagonalisable, déterminer ses valeurs propres et sous-espaces propres.
2. Justifier que $B_a$ est diagonalisable et déduire de la question précédente, ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.

CCS **Exercice 21.** *Centrale 2023 / BEOS 7876*

Soient $a$, $b$ et $c$ trois réels. On considère

$$S = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = (a+b+c)u_{n+2} - (ab+ac+bc)u_{n+1} + abcu_n\}.$$

1. Montrer que $S$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Vérifier que $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c^n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$.
3. On considère $\phi\colon S \to \mathbb{R}^3$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1, u_2)$.
   Montrer que $\phi$ est un isomorphisme. En déduire la dimension de $S$.

4. On pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$, où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$. Trouver une matrice $A$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$.
5. Déterminer une base de $S$ lorsque $a, b, c$ sont distincts.
6. Même question lorsque $a = b$ et $a \neq c$ puis lorsque $a = b = c$.
7. Écrire deux fonctions, l'une récursive, l'autre non, prenant $(n, a, b, c, u_0, u_1, u_2)$ comme arguments et renvoyant $u_n$. Représenter ensuite les vingt premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

CCP **Exercice 22.** *IMT PC / OdlT 2018-238*

Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in \mathbb{R}$ l'intégrale suivante converge-t-elle :

$$\int_2^{+\infty} \left(\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x\sqrt[3]{x^3 + ax}\right) \mathrm{d}x\,?$$

CCP **Exercice 23.** *Récolte CCP 2019 - Tino*

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = P(Y = n) = q^n p$ où $q = 1 - p$. On note aussi $S = X + Y$.

1. Donner l'ensemble image de $X + 1$, $Y + 1$ et $S$.
2. a) Montrer que $X + 1$ et $Y + 1$ suivent une loi géométrique de paramètre $p$.
   b) Donner $E(X)$, $V(X)$, $E(Y)$ et $V(Y)$.
3. Déterminer la loi de $S$.
4. Soit $I = \min(X, Y)$.
   a) Montrer que $P(I \geqslant k) = q^{2k}$.
   b) Donner la loi de I en utilisant que $P(I = k) = P(I \geqslant k) - P(I \geqslant k + 1)$.
   c) Calculer $E(I)$ et $V(I)$.

CCP **Exercice 24.** *IMT PC moins détaillé / OdlT 2018-243*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $J_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(3 + t^2)^n}$.

1. Justifier que $J_n$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculer $J_1$.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J_n = 2n\big(J_n - 3J_{n+1}\big)$. *On pourra remarquer que* $2nt^2 = 2n(t^2 + 3 - 3)$.
4. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} J_n$.

CCS **Exercice 25.** *IMT PC / OdlT 2018-244*

Soit $(a_n)$ la suite définie par $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ et $a_{n+2} = (n + 1)\big(a_n + a_{n+1}\big)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{a_n}{n!} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
2. Existence puis calcul de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n!}$.

CCP* **Exercice 26.** *CCINP 2022 / BEOS 7031*

1. Justifier l'existence d'un développement limité en zéro à l'ordre $p \in \mathbb{N}$ pour la fonction $x \mapsto (1+x)^{1/2}$.
2. Écrire une fonction Python donnant $a_0, \ldots, a_p$ les coefficients de ce développement limité.
3. On note $P \in \mathbb{R}_p[X]$ tel que $(1 + x)^{1/2} = P(x) + o(x^p)$ quand $x \to 0$.
   Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 + x - P(x)^2}{x^p} = 0$.
4. Énoncer le théorème de la division euclidienne des polynômes puis montrer que $X^p$ divise $P^2 - X - 1$.
5. Soit $A$ une matrice nilpotente. Montrer qu'il existe une matrice $B$ telle que $B^2 = I + A$.

CCP **Exercice 27.** *IMT PC sans détail / OdlT 2018-245*

Le but de cet exercice est de calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_{ax}^{bx}\frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$ où $0<a<b$ sont deux réels fixés.

1. Justifier que $\forall x>0$, $\forall t\in[ax\,;bx]$, $\dfrac{\mathrm{e}^{ax}}{t}\leqslant\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}\leqslant\dfrac{\mathrm{e}^{bx}}{t}$.
   Que se passe-t-il si $x<0$ ?
2. Calculer $\displaystyle\int_{ax}^{bx}\frac{\mathrm{d}t}{t}$ pour $x\neq 0$.
3. C onclure.

CCP* **Exercice 28.** *Récolte CCP 2019 - Dylan*

On considère $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{sinon}\end{cases}$ et l'équation différentielle $(E)$ : $xy''+2y'+xy=0$.

1. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Cherche une solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ développable en série entière.
3. En déduire les solutions de $(E)$ sur $]0\,;\pi[$.

CCP **Exercice 29.** *CCINP TSI 2021 / BEOS 6518*

On considère la fonction $f\colon(x,y)\mapsto x^4+y^4-4xy$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer les points critiques de $f$.
2. Est-ce que $(0,0)$ est un extremum local ?
3. En calculant $f(x,y)+2-\left(x^2-1\right)^2-\left(y^2-1\right)^2$, montrer que les deux autres points critiques sont des minimums globaux de $f$.

CCS **Exercice 30.** *CCP PC / OdlT 2018-192*

On considère l'application $f$ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(X)=X-2\operatorname{Tr}(X)A$ où $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle fixée.

1. Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On choisit $\operatorname{Tr}A=\frac{1}{2}$. Montrer que $\operatorname{Ker}(f)=\operatorname{Vect}(A)$.
3. On choisit $\operatorname{Tr}A\neq\frac{1}{2}$. Montrer que $f$ est bijective.
4. On revient dans le cas $\operatorname{Tr}A=\frac{1}{2}$. Montrer que $f$ est le projecteur sur l'ensemble des matrices de trace nulle parallèlement à $\operatorname{Vect}(A)$.
5. On choisit $\operatorname{Tr}A=1$. Montrer que $f$ est une symétrie dont on donnera les éléments caractéristiques.

CCP **Exercice 31.** *CCP TSI / OdlT 2019-268*

Soient $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}$ et $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A$.

1. Calculer $A^2$. Que peut-on en déduire quand à la nature de $f$ ?
2. Déterminer une base de $\operatorname{Im}(A)$ et $\operatorname{Ker}(A)$ puis montrer que ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.
3. Donner la matrice de $f$ dans la base adaptée à cette somme directe.

CCP **Exercice 32.** *IMT PC simplifié / OdlT 2018-240*

En considérant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2$.

CCP **Exercice 33.** *IMT PC simplifié / OdlT 2018-249*

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda$ et $\mu$.

1. Montrer que $Z=X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.
2. Montrer que $\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}=2\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^{2p}}{(2p)!}$.
3. Quel événement est le plus probable : « $X$ pair » ou « $X$ impair » ?

CCP **Exercice 34.** *Récolte CCP 2019 - Paul*

Soit $A_{2n}$ la matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ donnée par $(A_{2n})_{i,j} = \begin{cases} a & \text{si } i=j, \\ b & \text{si } j = 2n+1-i, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$ où $a$ et $b$ sont deux réels.

1. Donner $A_2$ et $A_4$.
2. On note $\Delta_{2n} = \det(A_{2n})$. Calculer $\Delta_2$ et $\Delta_4$.
3. Calculer $\Delta_{2n}$ dans le cas $a = 0$.
4. Même question pour $a \neq 0$.

---

## Indications

**exo 1.** Poser $z = x + \mathrm{i}y$ avec $x$ et $y$ réels.

**exo 2.** Q3 : Théorème de la bijection.
Q5 : Utiliser $f_n(x_n) = 0$ et la définition d'un équivalent via une limite.

**exo 3.** Q2 : Utiliser l'équation vérifiée par $x'$ et la question 1.
Q5 : Penser à utiliser les conditions initiales.

**exo 4.** Q1 : Sur une figure, placer $M(t)$ et $M(-t)$.

**exo 5.** Passer à la forme exponentielle puis effectuer des DL.

**exo 6.** Q2a : Faire bien attention lors du dénombrement.

**exo 7.** Q2 : Revenir à la définition d'un sens de variation : comparer $f(x)$ et $f(y)$ pour $x \leqslant y$.

**exo 8.** On peut faire un arbre pour se donner une idée.

**exo 9.** Q1 : Étudier la fonction $t \mapsto \sin(t) - t$.
Q4 : Procéder par comparaison et équivalent grâce aux deux questions précédentes.

**exo 10.** Q1b : Supposer $Q$ non constant et montrer qu'il admet alors une infinité de racines.
Q2a : Particulariser la relation vérifier par $P$ en des valeurs bien choisies pour $X$.

**exo 11.** Q3&4 : Distinguer les cas suivant la valeur de $Y$ par rapport à $k$.
Q4 : Il faut inverser les deux sommes en faisant attention aux indices qui sont interdépendants.

**exo 12.** Q1 : Formule de trigo puis remarquer que par définition $f$ est la primitive s'annulant en 0 de la fonction dans l'intégrale.

**exo 13.** Q2 : On peut chercher des vecteurs propres « évidents » pour s'épargner des calculs.
Q3 : Montrer que c'est une symétrie et faire un dessin pour le lien entre éléments caractéristiques et vecteurs propres.

**exo 14.** Q1 : Pour éviter des calculs, raisonner par l'absurde pour la diagonalisabilité.
Q2 : Raisonner sur les colonnes de la matrice de passage.

**exo 15.** Q1 : Supposer par l'absurde que 0 est valeur propre et considérer un vecteur propre associé.
Q2 : Montrer d'abord que $F = \mathrm{Vect}\{\mathrm{id}, u\}$ puis supposer par l'absurde que ces deux endomorphismes sont liés.

**exo 16.** Q1 : Étudier la fonction $x \mapsto \sin(x) - x$.
Q4&5 : Développement limité et télescopage.

**exo 17.** Q3 : Il suffit de résoudre l'équation différentielle par les méthodes habituelles puis d'évoquer l'unicité de la solution vérifiant $y(0) = 0$.

**exo 18.** Q1 : Tout peut se faire presque sans aucun calcul.
Q4 : Faire un dessin pour retrouver le lien entre l'identité, la projection et la symétrie par rapport à un même sev.

**exo 19.** Q2 : Comparaison série-intégrale.

**exo 20.** Q1 : Utiliser le rang puis la trace pour déterminer les valeurs propres. Les vecteurs propres se trouvent en cherchant des relations entre les colonnes.
Q2 : Faire le lien entre les valeurs propres de $B_a$ et celles de $A$.

**exo 21.** Q3 : Pour l'injectivité et la surjectivité, comprendre qu'avec les trois premiers termes, on détermine toute la suite.
Q6 : Trouver de l'intuition grâce au cours dans le cas des suites d'ordre 2.

**exo 22.** Développement limité après avoir fait une mise en facteur adéquate afin de faire apparaître la forme $(1+y)^\alpha$ avec $y \to 0$ lorsque $x \to 0$.

**exo 23.** Q3 : Proba totales
Q4a : Traduire l'événement $(I \geqslant k)$ en fonction de $X$ et $Y$ et utiliser l'indépendance.
Q4c : Pour éviter les calculs, remarquer que le résultat de Q4b correspond à une loi géométrique de paramètre $1-q^2$ $(= p(2-p))$.

**exo 24.** Q2 : C'est proche de la dérivée d'un arctan.
Q4 : Règle de d'Alembert en ayant, grâce à Q3, exprimer $J_{n+1}$ en fonction de $J_n$.

**exo 25.** Q1 : Récurrence double.
Q2 : D'après Q1, l'étude de cette suite revient à l'étude d'une série.

**exo 26.** Q2 : Utiliser l'expression sous forme de produit du cours.
Q4 : Isoler $\left(P^2 - X - 1\right)/X^p$ et faire le lien avec la question précédente en prenant la limite en 0.
Q5 : $A$ est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}$ telle que $A^p$ est la matrice nulle.

**exo 27.** Q1 : Quel est le sens de variation de $t \mapsto \mathrm{e}^t$ ?
Q3 : Intégrer la relation obtenue en Q1 puis utiliser le théorème des gendarmes.

**exo 28.** Q1 : Montrer que $f$ est développable en série entière (penser à vérifier la valeur en 0).
Q3 : Ne pas avoir peur des calculs + une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2 x}$ est $x \mapsto -\dfrac{\cos x}{\sin x}$.

**exo 29.** Q2 : S'intéresser à $f(x,x)$ et $f(x,0)$.
Q3 : Identité remarquable.

**exo 30.** Q5 : Faire un dessin pour voir que la symétrie se fait par rapport aux éléments tels que $f(X) = X$ et parallèlement à ceux tels que $f(X) = -X$. Les résolutions ensuite sont assez simples.

**exo 31.** Q2 : Pour le caractère supplémentaire, montrer que la concaténation des deux bases est une famille libre comportement le « bon » nombre d'éléments.

**exo 32.** Binôme de Newton pour avoir la première somme en fonction de $x$ puis dérivations terme à terme pour faire apparaître le $k^2$. Au final, on aura la valeur souhaitée en prenant $x = 1$.

**exo 33.** Q1 : probas totales
Q2 : Développer en série entière et séparer les puissances paires et impaires.
Q3 : Calculer la probabilité que $X$ soit pair et comparer à $1/2$.

**exo 34.** Q3 : Se ramener à un déterminant diagonal par des échanges de colonnes.
Q4 : Développer deux fois pour obtenir une relation de récurrence.