Méthode : résoudre une équation différentielle d'ordre 2

1 Coefficients constants

On cherche à résoudre l'équation différentielle :

$$(E)\colon \ ay'' + by' + cy = d(t),$$

où a, b et c sont trois réels (*i.e.* des constantes qui ne dépendent pas de la variable t) et d une fonction continue sur un intervalle I.

Dans ce cas, on procède[1] comme pour les équations différentielles d'ordre 1 en deux étapes :

1. on résout l'équation homogène associée $(H)\colon ay'' + by' + c = 0$;
2. on détermine une solution particulière y_P de (E).

1.1 Équation homogène associée

Pour résoudre l'équation homogène $(H)\colon ay'' + by' + c = 0$, on considère l'équation caractéristique $(EC)\colon ar^2 + br + c$ et on distingue plusieurs cas suivant la valeur du discriminant.

– Si $\Delta > 0$, en notant r_1 et r_2 les deux racines réelles de (EC), les solutions de (H) sont de la forme

$$y_H(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{r_1 t} + \mu\,\mathrm{e}^{r_2 t} \ \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

– Si $\Delta = 0$, en notant r_0 la racine double de (EC), les solutions de (H) sont de la forme

$$y_H(t) = (\lambda + \mu t)\,\mathrm{e}^{r_0 t} \ \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

– Si $\Delta < 0$, en notant r_1 et r_2 les deux solutions complexes conjuguées de (EC), les solutions *complexes* de (H) sont de la forme

$$y_H(t) = A\,\mathrm{e}^{r_1 t} + B\,\mathrm{e}^{r_2 t} \ \text{ avec } A, B \in \mathbb{C}.$$

Cependant, il est très souvent préférable d'obtenir les solutions *réelles*. Pour ce faire, on écrit l'une des deux racines sous forme algébrique : $r_1 = \alpha + \beta\mathrm{i}$ (et dans ce cas $r_2 = \alpha - \beta\mathrm{i}$). Les solutions *réelles* de (H) sont alors de la forme

$$y_H(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\big(\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)\big) \ \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1. Résoudre $(H_1)\colon y'' - 4y' + 3y = 0$.
L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 3 = 0$, le discriminant vaut $\Delta = 4 > 0$. Les racines sont 1 et 3 donc les solutions de (H_1) sont les fonctions de la forme $t \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{t} + \mu\,\mathrm{e}^{3t}$ avec $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$.

Exemple 2. Résoudre $(H_2)\colon y'' + y' + y = 0$.
L'équation caractéristique est $r^2 + r + 1 = 0$ de discriminant $\Delta = -3 < 0$. Les racines sont $r_1 = \frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$. Pour déterminer les solutions réelles, écrivons $r_2 = \frac{-1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les solutions de (H_2) sont les fonctions de la forme $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t/2}\Big(\lambda\cos\big(\frac{\sqrt{3}}{2}t\big) + \mu\sin\big(\frac{\sqrt{3}}{2}t\big)\Big)$ avec $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$.

1.2 Recherche d'une solution particulière

Pour déterminer une solution particulière de (E), on regarde le second membre :

– s'il est constant, on cherche une solution particulière constante ;

– si c'est un polynôme, on cherche une solution particulière sous forme d'un polynôme de même degré ;

– s'il est sous forme d'un sin ou d'un cos, on cherche une solution particulière sous la forme d'une combinaison linéaire de sin et cos (méthode identique à celle pour l'ordre 1, voir fiche correspondante) ;

– s'il est de la forme $d(t) = \gamma\,\mathrm{e}^{\delta t}$, suivant si δ n'est pas racine, est racine simple ou est racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme $k\,\mathrm{e}^{\delta t}$, $kt\,\mathrm{e}^{\delta t}$ ou $kt^2\,\mathrm{e}^{\delta t}$.

1. Un exemple complet en vidéo : `https://youtu.be/TTq9Xw-e0Ig`

Exemple 3. Déterminer une solution particulière de (E_2): $y'' + 3y' + 5y = 2$.
Comme le second membre est constant, on cherche une solution particulière sous la forme $y_P(t) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$. Cette fonction est deux fois dérivable et ses dérivées sont nulles d'où, en injectant dans (E_2), $5k = 2$.
Ainsi la fonction constante égale à $\frac{2}{5}$ est solution particulière de (E_2).

Exemple 4. Déterminer une solution particulière de (E_1): $y'' + y' + y = 8\,\mathrm{e}^{3t}$.
D'après l'exemple 1, 3 est racine simple de l'équation caractéristique associée donc on cherche une solution particulière sous la forme $y_P(t) = kt\,\mathrm{e}^{3t}$.
Cette fonction est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont. On dérive deux fois en tant que produit et on injecte dans (E_1). Après calculs et simplifications, il vient $2k\,\mathrm{e}^{3t} = 8\,\mathrm{e}^{3t}$ d'où $k = 4$.
Ainsi la fonction $t \longmapsto 4t\,\mathrm{e}^{3t}$ est solution particulière de (E_1).

1.3 Solutions générales et problème de Cauchy

Comme pour les équations différentielles d'ordre 1, les solutions générales sont de la forme « solutions homogènes + solution particulière ».

Exemple 5. Résoudre l'équation (E_1): $y'' + y' + y = 8\,\mathrm{e}^{3t}$.
On a déterminé les solutions homogènes dans l'exemple 1 et une solution particulière dans l'exemple 4 d'où

$$S = \left\{ t \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{t} + \mu\,\mathrm{e}^{3t} + 4t\,\mathrm{e}^{3t} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Enfin, si on dispose de deux conditions initiales $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_1$, on détermine les valeurs des constantes λ et μ et on obtient ainsi une unique solution au problème de Cauchy.

2 Coefficients variables

On cherche à résoudre l'équation différentielle :

$$(E):\ a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t),$$

où a, b, c et d sont des fonctions continues sur l'intervalle I, avec a qui ne s'y annule pas.

La principale chose à retenir est qu'il n'existe aucune méthode générale pour résoudre ce genre d'équation différentielle !

Il est donc important de suivre l'énoncé et s'y adapter : recherche de solutions sous une forme donnée, vérification que telle fonction est solution, etc.

Exemple 6. Montrer que la fonction h définie par $h(t) = t^2$ est solution de (H_3): $t^2y'' - 3ty' + 4y = 0$ sur $I =]0\,;+\infty[$.
La fonction h est polynomiale donc deux fois dérivable sur I avec $h'(t) = 2t$ et $h''(t) = 2$. Ainsi $t^2h''(t) - 3th'(t) + 4h(t) = 2t^2 - 6t^2 + 4t^2 = 0$ pour tout $t \in I$, *i.e.* h est solution de l'équation homogène (H_3) sur I.

2.1 Abaissement de l'ordre

La seule méthode un tant soit peu générale est celle de l'abaissement de l'ordre[2] qui nécessite de connaître préalablement une solution h de l'équation homogène associée, avec h qui ne s'annule pas sur I.
Elle consiste à chercher les solutions sous la forme $y(t) = z(t)h(t)$ où z est une fonction inconnue deux fois dérivable sur I. Pour cela :

- on dérive deux fois y comme produit (après avoir justifié la dérivabilité) ;
- on injecte dans (E) et on simplifie au maximum : les termes en z se simplifient et on aboutit à z' solution d'une équation différentielle d'ordre 1 ;
- on résout cette équation différentielle d'ordre 1 ;
- on a donc z', on primitive (sans oublier la constante) pour obtenir z et on a enfin y en multipliant par h.

Exemple 7. Résoudre (E_3): $t^2y'' - 3ty' + 4y = t^3$ sur $I =]0\,;+\infty[$.
• On a montré dans l'exemple 6 que la fonction h donnée par $h(t) = t^2$ est solution de l'équation homogène associée. On cherche donc les solutions de (E_3) sous la forme $y(t) = z(t)h(t) = t^2z(t)$ avec z deux fois dérivable sur I.
En tant que produit de fonctions dérivables sur I, y l'est également. On calcule y' et y'' (dérivées de produits), on injecte dans (E_3) et on simplifie pour obtenir $t^4z'' + t^3z' = t^3$. Comme $t^3 \neq 0$ sur I, ceci équivaut à $z'' + \dfrac{1}{t}z' = \dfrac{1}{t}$.
• Ainsi z est solution de l'équation différentielle $u' + \dfrac{1}{t}u = \dfrac{1}{t}$. Par les méthodes de résolutions usuelles (voir fiche correspondante), on trouve $z'(t) = \dfrac{\lambda}{t} + 1$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On primitive : $z(t) = \lambda\ln(t) + t + \mu$ avec λ, $\mu \in \mathbb{R}$.
• Finalement, comme on a posé $y(t) = t^2z(t)$, les solutions de (E_3) sont les fonctions de la forme $y(t) = \lambda t^2\ln(t) + t^3 + \mu t^2$ avec λ, $\mu \in \mathbb{R}$.

2. Un exemple détaillé en vidéo : `https://youtu.be/Ygp3w2f6VEI`