Méthode : diagonaliser une matrice symétrique réelle

Théorème 1 – Théorème spectral

Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle.
Il existe une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale et une matrice $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ orthogonale telle que $A = PDP^{-1}$.
Autrement dit, tout matrice symétrique réelle est

① diagonalisable,

② ses valeurs propres sont réelles,

③ la matrice de passage peut être choisie orthogonale.

On dispose d'une matrice symétrique réelle A que l'on souhaite diagonaliser avec une matrice de passage orthogonale.

1. On détermine les valeurs propres de A : ce sont les racines du polynôme caractéristique χ_A.
2. On détermine une base de chaque espace propre.
3. On construit une base orthonormée de chacun des espaces propres (généralement en utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt).
4. La matrice de passage P est alors la matrice dont les colonnes sont constituées des coordonnées des vecteurs des bases orthonormées déterminées à l'étape précédente.
5. Si on a besoin de calculer P^{-1}, on utilise le fait que P est orthogonale donc $P^{-1} = P^\top$.

Remarque. L'algorithme de Gram-Schmidt est utilisé avec le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ identifié avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exemple 2 – *Diagonaliser, avec une matrice de passage orthogonale, la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

0. La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable avec une matrice de passage orthogonale.
1. On a $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_3 - A) = \cdots = (\lambda-3)^2(\lambda+3)$ donc les valeurs propres sont -3 et 3.
2. La résolution du système $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ donne $E_{-3}(A) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$. La résolution du système $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ donne $E_3(A) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.
3. Pour $E_{-3}(A)$, il suffit de normer le vecteur de la base : $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Pour $E_3(A)$, on applique l'algorithme de Gram-Schmidt aux deux vecteurs obtenus à l'étape précédente.
   On obtient $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
4. On a alors $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Si on a besoin de calculer P^{-1}, comme par construction $P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$, son inverse est sa transposée :

$$P^{-1} = P^\top = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$