Chapitre 1 : Équations différentielles d'ordre 1

Dans tout ce qui suit $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Rappels de première année : équations à coefficients constants

Vous avez étudié l'an dernier la résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants, *i.e.* celles de la forme

$$(E_1): \quad y' + ay = b(x)$$

où $a \in \mathbb{K}$ est un nombre réel ou complexe (une constante) et b une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. La partie de droite, où il n'y a pas de y, est appelée « second membre ».

Exemple 1

(E_2): $y' + 2y = x$ est une équation différentielle d'ordre 1 à coefficients constants.

1.1 Équation homogène associée

Définition 2 – Équation homogène

L'équation homogène associée à (E_1) est l'équation différentielle

$$(H_1): \quad y' + ay = 0.$$

Proposition 3 – Solution homogène

Les solutions de (H_1) sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-ax} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Exemple 4 – *Donner puis résoudre l'équation homogène associée à (E_2).*

L'équation homogène associée à (E_2) est (H_2): $y' + 2y = 0$.
Ses solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-2x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
On peut aussi écrire :
$\mathcal{S} = \{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-2x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

1.2 Solution générale

Définition 5 – Solution particulière

Une solution (particulière) de l'équation (E_1) est une fonction y_P dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y_P{}'(x) + a y_P(x) = b(x).$$

Théorème 6 – Structure solutions

Notons y_P une solution particulière de l'équation (E_1).
Alors les solutions de (E_1) sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \underbrace{\lambda\,\mathrm{e}^{-ax}}_{\text{sol. homo.}} + \underbrace{y_P(x)}_{\text{sol. part.}} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Exemple 7 – *Vérifier que la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est solution de (E_2).*

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{2}$.
On injecte dans le membre de gauche de (E_2) : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) + 2f(x) &= \tfrac{1}{2} + 2\Big(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\Big) \\ &= \tfrac{1}{2} + x - \tfrac{1}{2} \\ &= x \end{aligned}$$

i.e. f est bien solution de (E_2).

Exemple 8 – *En déduire l'ensemble des solutions de (E_2).*

On vient d'obtenir une solution particulière de (E_2) et on a déterminé les solutions homogènes dans l'exemple 4, d'où :
$\mathcal{S} = \{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

1.3 Méthodes de recherche d'une solution particulière

Il peut arriver que l'énoncé suggère une solution particulière, il suffit alors de vérifier qu'elle convient.

⇝ Relire l'exemple 8.

Il y a cependant plusieurs situations où vous devez savoir chercher une solution particulière par vous-même. Pour cela il faut regarder le second membre :

- s'il est constant, on cherche une solution particulière sous la forme d'une fonction constante ;
- s'il est de la forme $A\,\mathrm{e}^{\alpha x}$ avec A et α deux réels, on cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto B\,\mathrm{e}^{\alpha x}$ avec B un réel à déterminer (sauf si $\alpha = -a\dots$) ;
- s'il s'agit de la forme $A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$ avec $(A, B, \omega) \in \mathbb{R}^3$, on cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto C\cos(\omega x) + D\sin(\omega x)$ avec C et D des réels à déterminer.

⇝ TD2 exercice 1

1.4 Problème de Cauchy

Définition 9 – Problème de Cauchy

On appelle problème de Cauchy une équation différentielle de la forme (E_1) accompagnée d'une condition initiale $y(x_0) = y_0$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{K}$ fixés.

Théorème 10 – Théorème de Cauchy

Le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + ay = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

En pratique, pour déterminer cette unique solution :

1. on prend la solution générale obtenue précédemment (cf §1.2) ;
2. on lui impose la condition initiale $y(x_0) = y_0$, cela permet de trouver la valeur de la constante λ qui convient.

Exemple 11 – *Déterminer l'unique solution de l'équation* (E_2) *vérifiant* $y(0) = 1$.

On a vu dans l'exemple 8 que les solutions de (E_2) sont les fonctions de la forme $y(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Or $y(0) = 1$ donc $\lambda \times 1 + 0 - \frac{1}{4} = 1$ d'où $\lambda = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$. Ainsi, l'unique solution de ce problème de Cauchy est la fonction $x \mapsto \frac{5}{4}\,\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

2 Nouveauté : équations à coefficients quelconques

2.1 De quoi parle-t-on ?

On s'intéresse cette année non plus seulement aux équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants mais plus généralement à celles à coefficients quelconques. Plus précisément, aux équations différentielles de la forme

$$(E): \quad y' + a(t)y = b(t),$$

où a et b sont deux fonctions réelles ou complexes **définies et continues** sur un intervalle I.
Pour tout le reste du chapitre, on se place dans ce cas.

Remarques.

1. Si a est une fonction constante, on retrouve le cas étudié en première année (cf section 1).
2. Si on dispose d'une équation différentielles de la forme $\alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t)$, on se ramène à la forme précédente, appelée *normalisée*, en divisant par $\alpha(t)$. ⚠ Pour ce faire, il faut se placer sur un *intervalle* sur lequel la fonction α ne s'annule pas.
3. L'équation $y' + ty^2 = \mathrm{e}^t$ ne fait pas partie du cadre de notre étude car elle n'est pas linéaire (à cause du carré sur y).

Exemple 12

On pourra s'intéresser aux équations différentielles :

- $y' - 2ty = 0$ sur $\mathbb{R}$;
- $y' + \mathrm{e}^t\, y = \ln t$ sur $]0\,;+\infty[$;
- $(t-3)y' + ty = 1 \iff y' + \dfrac{t}{t-3}y = \dfrac{1}{t-3}$ sur $]-\infty\,;3[$ ou sur $]3\,;+\infty[$ (mais pas sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ qui n'est pas un intervalle).

Définition 13 – Solution

Une fonction $f\colon I \to \mathbb{K}$ est *solution* de (E) sur l'intervalle I si :

① f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,

② $\forall t \in I,\ f'(t) + a(t)f(t) = b(t)$.

Exemple 14 – *Vérifier que la fonction $g\colon t \mapsto 1+t^2$ est solution sur $\mathbb{R}$ de $(E_3)\colon y' - \frac{t}{1+t^2}y = t$.*

- La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions qui le sont (exponentielle et polynomiale).
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $g'(t) = 2t$ et donc

$$g'(t) - \frac{t}{1+t^2}g(t) = 2t - \frac{t}{\cancel{1+t^2}}\cancel{1+t^2} = 2t - t = t,$$

i.e. g est solution de l'équation différentielle (E_3).

2.2 Équation homogène associée

Définition 15 – Équation homogène associée

L'*équation homogène* associée à $(E)\colon y' + a(t)y = b(t)$ est l'équation différentielle

$$(H): \quad y' + a(t)y = 0.$$

Théorème 16 – Forme des solutions de l'équation homogène

Soit a une fonction continue sur un intervalle I et considérons l'équation homogène $(H)\colon y' + a(t)y = 0$.
Notons A une primitive de la fonction a sur l'intervalle I.
Les solutions de (H) sont les fonctions de la forme

$$t \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-A(t)} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Autrement dit, l'ensemble des solutions de (H) est un espace vectoriel de dimension 1 engendré par la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-A(t)}$.

Démonstration.
Tout d'abord, notons que la fonction A existe car a est continue sur l'intervalle I.
• Vérifions qu'une fonction y de la forme $t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-A(t)}$ est solution de (H) sur I. Une telle fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I comme composée de fonctions qui le sont (la dérivée de A est a qui est continue sur I). Pour tout $t \in I$, on a $y'(t) = -\lambda a(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)}$ d'où

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = -\lambda a(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)} + a(t)\lambda\,\mathrm{e}^{-A(t)} = 0,$$

i.e. y est solution de (H).
• Réciproquement, montrons que toutes les solutions de (H) sont de la forme annoncée.
Soit y une solution de (H) sur I. Notons φ la fonction définie par $\varphi(t) = y(t)\,\mathrm{e}^{A(t)}$ pour tout $t \in I$. La fonction φ est dérivable sur I comme produit et composée de fonctions qui le sont. Par dérivation d'un produit, on a

$$\forall t \in I, \quad \varphi'(t) = y'(t)\,\mathrm{e}^{A(t)} + y(t)A'(t)\,\mathrm{e}^{A(t)} = \left[y'(t) + a(t)y(t)\right]\mathrm{e}^{A(t)} = 0$$

où la dernière égalité vient du fait que y est solution de (H).
Comme la fonction φ est continue sur I et de dérivée identiquement nulle sur cet intervalle, on en déduit qu'elle est constante sur I. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(t) = \lambda$ pour tout $t \in I$. Autrement dit, par définition de φ on a, pour tout $t \in I$, $y(t)\,\mathrm{e}^{A(t)} = \lambda$ ou encore $y(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-A(t)}$. ❑

Remarque.
Si la fonction a est une constante, *i.e.* pour tout $t \in \mathbb{R}$, $a(t) = c$ avec $c \in \mathbb{K}$, on retrouve le cas vu en première année (cf §1.1). En effet, dans ce cas, une primitive de la fonction a est la fonction A définie par $A(t) = ct$ et les solutions de (H) sont alors les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-ct}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exemple 17 – *Résoudre l'équation* $(H_3)\colon y' - \frac{t}{1+t^2}y = 0$ *sur* $\mathbb{R}$.

La fonction $a\colon t \mapsto -\dfrac{t}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et une primitive est $A\colon t \mapsto -\dfrac{1}{2}\ln|1+t^2| = -\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2)$.
Les solutions de (H_3) sont donc les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\left(-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right)} = \lambda\,\mathrm{e}^{\ln\sqrt{1+t^2}} = \lambda\sqrt{1+t^2}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple 18 – *Résoudre l'équation* $(H_4)\colon ty' - y = 0$ *sur* $J = \left]0\,;+\infty\right[$.

Commençons par mettre (H_4) sous la forme normalisée : sur J, $t \neq 0$ donc $(H_4) \iff y' - \dfrac{1}{t}y = 0$.
La fonction $a\colon t \mapsto -\dfrac{1}{t}$ est continue sur J et une primitive est $A\colon t \mapsto -\ln|t| = -\ln t$ (car $t > 0$ sur J).
Ainsi les solutions de (H_4) sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-(-\ln t)} = \lambda\,\mathrm{e}^{\ln t} = \lambda t$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\rightsquigarrow$ TD2 exercice 3

2.3 Équation complète

On reprend dans ce paragraphe les notations du précédent concernant les solutions homogènes.

Théorème 19 – Structure de l'ensemble des solutions

Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I.
Les solutions sur I de l'équation différentielle $(E)\colon y' + a(t)y = b(t)$ sont les fonctions de la forme $y = y_H + y_P$ où y_H est une solution de l'équation homogène associée (H), et y_P une solution particulière de (E). Autrement dit

$$\mathcal{S}_{(E)} = \{t \mapsto \underbrace{\lambda\,\mathrm{e}^{-A(t)}}_{\text{sol. homo.}} + \underbrace{y_P(t)}_{\text{sol. part.}} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

Démonstration.
• Vérifions que toute fonction ψ de la forme $t \mapsto y_H(t) + y_P(t)$ est solution de (E). Cette fonction est dérivable sur I comme somme de fonctions qui le sont et on a (en omettant l'écriture de la variable pour alléger les notations) :

$$\psi' + a\psi = y_H' + y_P' + a(y_H + y_P) = (y_H' + ay_H) + (y_P' + ay_P) = 0 + b = b,$$

où l'avant dernière égalité provient du fait que y_H est solution de (H) et y_P solution de (E). On a ainsi montré que ψ est solution de (E) sur I.
• Réciproquement, montrons que toutes les solutions de (E) sont de la forme annoncée.
Soit y_P une solution fixée de (E) sur I et y une autre solution de (E) sur I. Notons ϕ la fonction définie sur I par $\phi(t) = y(t) - y_P(t)$. Cette fonction est dérivable sur I comme différence de deux fonctions qui le sont et on a $\phi' = y' - y_P'$. Ainsi, pour tout $t \in I$, on a

$$\begin{aligned}
\phi'(t) + a(t)\phi(t) &= y'(t) - y_P'(t) + a(t)\big[y(t) - y_P(t)\big] \\
&= \big[y'(t) + a(t)y(t)\big] - \big[y_P'(t) + a(t)y_P(t)\big] \\
&= b(t) - b(t) && \text{car } y \text{ et } y_P \text{ solutions de } (E) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

i.e. ϕ est solution de l'équation homogène (H) associée à (E). Autrement dit, il existe une solution y_H de (H) telle que $\phi = y_H$, *i.e.* $y - y_P = y_H$ ce que l'on peut réécrire sous la forme $y = y_H + y_P$. ❑

Exemple 20 – *Déterminer les solutions sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation différentielle* $(E_3)\colon y' - \frac{t}{1+t^2}y = t$.

• Dans l'exemple 17, on a montré que les solutions de l'équation homogène associée (H_3) sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda\sqrt{1+t^2}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
• On a déterminé lors de l'exemple 14 que la fonction $t \mapsto 1 + t^2$ est une solution de (E_3).
• *Bilan* : les solutions de (E_3) sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda\sqrt{1+t^2} + 1 + t^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

⇝ TD2 exercice 5 (E1)

Proposition 21 – Principe de superposition

Soient a, b_1 et b_2 trois fonctions continues sur un intervalle I ainsi que λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{K}$.
Soit f_1 une solution sur I de $y' + a(t)y = b_1(t)$.
Soit f_2 une solution sur I de $y' + a(t)y = b_2(t)$.
Alors la fonction $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est solution sur I de $y' + a(t)y = \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t)$.

Démonstration.
• La fonction f est dérivable sur I comme combinaison linéaire de fonctions qui le sont.
• Pour tout $t \in I$, on a

$$\begin{aligned}
f'(t) + a(t)f(t) &= (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)'(t) + a(t)(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(t) \\
&= \lambda_1\big[f_1'(t) + a(t)f_1(t)\big] + \lambda_2\big[f_2'(t) + a(t)f_2(t)\big] \\
&= \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t).
\end{aligned}$$

❑

Exemple 22

Pour déterminer une solution particulière de $ty' - y = t + \sqrt{t}$, il suffit de trouver une solution de $ty' - y = t$ et une de $ty' - y = \sqrt{t}$, et d'additionner ces deux solutions.

2.4 Méthode de recherche d'une solution particulière : variation de la constante

⚠ Les méthodes vues en première année (cf §1.3) ne sont plus valides si a n'est pas une constante.

Il existe cependant une méthode universelle[1], appelée « variation de la constante » pour déterminer une solution particulière de $(E)\colon y' + a(t)y = b(t)$ sur un intervalle I une fois que l'on connaît les solutions de l'équation homogène associée. Décrivons-la :

0. On suppose avoir déterminé les solutions de l'équation homogène associée à (E). D'après le paragraphe 2.2, ce sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-A(t)}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ où A est une primitive de a sur l'intervalle I.
1. On va chercher une solution particulière y_P en posant $y_P(t) = z(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)}$: on a remplacé la constante λ par une fonction z de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, d'où le nom de la méthode. C'est maintenant z l'inconnue.
2. Après avoir calculé sa dérivée, on injecte y_P dans (E) et on simplifie au maximum : le terme en z disparaît toujours.
3. Il reste une égalité de la forme $z'(t) = \cdots$, il suffit alors de déterminer une primitive pour obtenir z.
4. On n'oublie pas que le but était de déterminer y_P qui est donc donnée par $y_P(t) = z(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)}$ avec z que l'on vient d'obtenir.

Exemple 23 – *Déterminer une solution particulière de* $(E_4)\colon ty' - y = t$ *sur* $J =]0\,;+\infty[$.

0. On a vu lors de l'exemple 18 que les solutions de l'équation homogène $(H_4)\colon ty' - y = 0$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda t$ avec $t \in \mathbb{R}$.
1. On va chercher une solution particulière de (E_4) sous la forme $y_P(t) = z(t)t$ avec z de classe $\mathcal{C}^1$ sur J.
2. La fonction y_P est dérivable sur J comme produit de fonctions qui le sont. Par dérivation d'un produit, on a, pour tout $t \in J$, $y_P'(t) = z'(t)t + z(t)$.

   Ainsi, y_P est solution de (E_4) si et seulement pour tout $t \in J$,
   $$ty_P'(t) - y_P(t) = t \iff t\big[z'(t)t + z(t)\big] - z(t)t = t \iff t^2 z'(t) + \cancel{tz(t)} - \cancel{z(t)t} = t \iff z'(t) = \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t},$$
   où la dernière division par t^2 est licite car $t^2 \neq 0$ sur J.
3. Comme $z'(t) = \dfrac{1}{t}$, on peut prendre $z(t) = \ln|t| = \ln t$ (car $t > 0$ sur J).
4. Ainsi, une solution particulière de (E_4) est la fonction y_P définie par $y_P(t) = z(t)t = t\ln t$ pour tout $t \in J$.

⇝ TD2 exercice 4

La méthode de variation de la constante permet théoriquement de résoudre n'importe quelle équation différentielle linéaire d'ordre 1 mais il ne faut pas l'utiliser sans avoir réfléchi préalablement :

- si les coefficients sont constants, on peut utiliser les méthodes vues l'an dernier (cf §1.3, c'est souvent le cas en physique) ;
- l'énoncé peut suggérer une solution ou la forme d'une solution ;
- si on ne se trouve pas dans l'un de ces deux cas, on utilise alors la méthode de variation de la constante.

⇝ TD2 exercice 5

1. En théorie, elle fonctionne toujours, en pratique on peut se heurter à des problèmes de primitives difficiles à déterminer.

2.5 Problème de Cauchy

Théorème 24 – Théorème de Cauchy

Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I.
Soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.
Le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution sur I.

Démonstration. (*idée*)
• D'après le théorème 16, en notant A une primitive de a sur I, les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-A(t)}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
• On utilise la méthode de variation de la constante pour déterminer une solution particulière y_P sous la forme $y_P(t) = z(t)\, \mathrm{e}^{-A(t)}$.
Après calculs, avec les notations du paragraphe précédent, on aboutit à $z'(t) = b(t)\, \mathrm{e}^{A(t)}$ $(*)$.
Par ailleurs, la condition initiale $y_P(t_0) = y_0$ se traduit en $z(t_0) = y_0\, \mathrm{e}^{A(t_0)}$ $(**)$.
Il suffit alors de primitiver $(*)$ en choisissant la constante qui permet de vérifier l'égalité $(**)$. Ceci montre à la fois l'existence et l'unicité d'une fonction z répondant au problème. Plus précisément, pour tout $t \in I$, on a $z(t) = y_0\, \mathrm{e}^{A(t_0)} + \displaystyle\int_{t_0}^{t} b(u)\, \mathrm{e}^{A(u)}\, du$ et donc l'expression de y_P après avoir multiplié $\mathrm{e}^{-A(t)}$. ❑

Remarque.
La méthode d'Euler, vue en physique l'an dernier, permet de construire numériquement une approximation de cette solution.

Exemple 25 – *Résoudre sur* $J =]0\,;+\infty[$ *le problème de Cauchy* $\begin{cases} ty' - y = t \\ y(1) = 3 \end{cases}$.

• D'après les exemples 18 et 23, les solutions de (E_4) sur J sont les fonctions f de la forme $f(t) = \lambda t + t \ln t$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
• La condition initiale $f(1) = 3$ donne $\lambda \times 1 + 1 \ln 1 = 3$, *i.e.* $\lambda = 3$.
Ainsi l'unique solution de ce problème de Cauchy est la fonction $f : t \mapsto 3t + t \ln t$.

⇝ TD2 exercice 6

Plan de résolution

Pour résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

① On résout l'équation homogène associée. ⇝ §2.2

② On détermine une solution particulière, éventuellement en utilisant la méthode de variation de la constante. ⇝ §2.4

③ On en déduit l'ensemble des solutions : solutions homogènes + solution particulière. ⇝ §2.3

④ Si de plus une condition initiale est donnée, on détermine la valeur de la constante λ pour obtenir l'unique solution du problème de Cauchy. ⇝ §2.5