Jeux d'accessibilité à deux joueurs

1 Introduction

La théorie des jeux, domaine des mathématiques, débute véritablement dans les années 1920. En 1944, le mathématicien John Von Neumann et l'économiste Oskar Morgenstern publient un ouvrage[1] considéré comme la pierre fondatrice de ce domaine. Cette discipline n'a depuis cessé de se développer et ses applications de se multiplier (économie, relations sociales et internationales, biologie, etc.). Par exemple, l'algorithme d'affection de SCEI provient de la résolution du problème dit des mariages stables par Gale et Shapley[2].

1.1 Les jeux auxquels on s'intéressera

Dans un jeu, des joueurs, à partir d'une situation donnée, prennent des décisions à tour de rôle parmi un ensemble fini de décisions possibles, chacune menant à une nouvelle situation.

Par la suite, nous nous limiterons à des jeux :

— à deux joueurs jouant à tour de rôle ;
— à information complète, *i.e.* chaque joueur connaît l'ensemble de la situation ;
— sans mémoire, *i.e.* la décision est prise seulement en fonction de la situation actuelle, pas des situations passées ;
— sans hasard.

On peut par exemple penser au morpion, au puissance 4, aux dames, aux échecs, au go, etc.

Tous ces jeux peuvent être modélisés par des graphes orientés finis : chaque sommet est une situation (on parle aussi de position) et chaque arête correspond à une décision, un coup possible. On peut alors voir le jeu comme le déplacement d'un jeton sur ce graphe : on démarre sur un sommet donné et à tour de rôle les joueurs déplacent le jeton en suivant des arêtes.

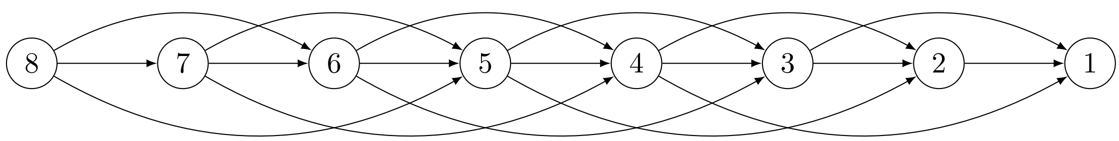
On s'intéressera plus particulièrement aux *jeux d'accessibilité* : pour gagner, chaque joueur a pour but d'atteindre un ou plusieurs sommets particuliers.

1.2 Un exemple : le jeu de Nim

Une des variantes du jeu de Nim a été popularisée par l'émission Fort Boyard[3]. Au départ, il y a 20 bâtonnets et à tour de rôle, chaque joueur en enlève 1, 2 ou 3. Le perdant est celui qui enlève le dernier bâtonnet.

Exemple 1 – *Première représentation du jeu des bâtonnets*

Une première façon de représenter ce jeu est d'indiquer dans les sommets les positions possibles (nombre de bâtonnets disponibles) et de tracer les arcs donnant les coups possibles. Si on se contente de 8 bâtonnets, on a :



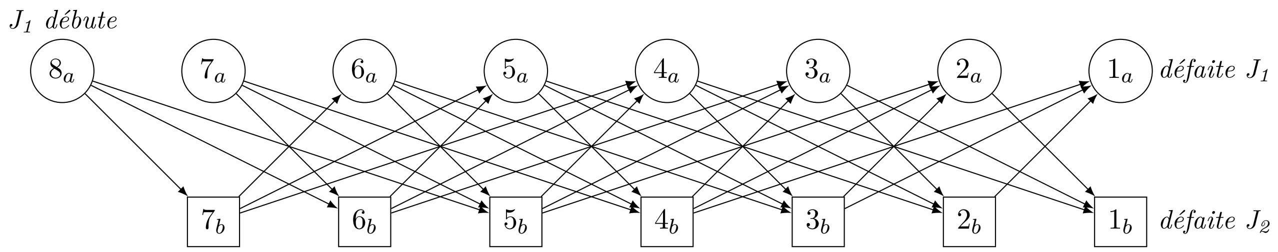
L'inconvénient de cette représentation c'est qu'elle ne permet pas de distinguer entre les coups réalisés par le premier joueur (J_1) et ceux réalisés par le second (J_2).

1. *Theory of Games and Economic Behavior*
2. Lire par exemple `https://images-archive.math.cnrs.fr/Le-prix-Nobel-d-economie-2012.html`
3. Pour voir une partie où aucun des deux joueurs n'a suivi un cours de théorie des jeux : `https://youtu.be/dfFSpesQyNg?t=24`

Pour pallier ce problème, on ne va pas seulement représenter les positions possibles mais aussi différencier les sommets selon si c'est au premier ou au deuxième joueur de jouer. Pour ce faire, on va en quelque sorte « dédoubler » ce graphe (sauf la position de départ qui ne peut être jouée que par le premier joueur).

Exemple 2 – *Seconde représentation du jeu des bâtonnets*

Voici alors le graphe du même jeu avec 8 bâtonnets au départ où une position est représentée par un cercle si c'est au premier joueur de jouer et par un carré lorsque c'est au second de jouer. Afin de différencier également les noms des sommets, on indice par a (respectivement b) ceux pour lesquels c'est à J_1 (resp. J_2) de jouer.



1.3 Graphes bipartis

Comme vu lors de l'exemple précédent, afin de bien distinguer les coups des deux joueurs, ces jeux d'accessibilité à deux joueurs sont modélisés par des graphes bipartis. Comme leur nom l'indique, ces graphes sont composés de deux parties.

Notons le graphe orienté fini $G = (S, A)$ où S est l'ensemble des sommets et A l'ensemble des arêtes.

Définition 3 – Graphe biparti

Le graphe G est *biparti* si l'ensemble S de ses sommets peut être divisé en deux sous-ensembles disjoints S_1 et S_2 tels que chaque arête de A possède une extrémité dans S_1 et une autre dans S_2.
Autrement dit, $S = S_1 \cup S_2$ avec $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ et $\forall (x, y) \in A$, ($x \in S_1$ et $y \in S_2$) ou ($x \in S_2$ et $y \in S_1$).

Proposition 4 – Caractérisation graphe biparti

Un graphe est biparti si et seulement si on peut colorer ses sommets avec seulement deux couleurs sans que deux sommets voisins n'aient la même couleur.

$\rightsquigarrow$ exercices 1 et 2

2 Définitions et vocabulaire

On considère un jeu à deux joueurs J_1 et J_2 modélisé par un graphe orienté fini $G = (S, A)$ où S est l'ensemble (fini) des sommets et A l'ensemble des arcs (ou arêtes).

Définition 5 – Arène

Une *arène* (ou *graphe du jeu*) est un triplet (G, S_1, S_2) où $G = (S, A)$ est un graphe orienté biparti dont la partition est donnée par $S = S_1 \cup S_2$.

En pratique, S_1 représente les sommets contrôlés par le joueur J_1 (c'est-à-dire ceux pour lesquels c'est à lui de jouer) et S_2 ceux contrôlés par J_2.

On prendra pour convention que J_1 contrôle le sommet s_0 représentant la position de départ, *i.e.* $s_0 \in S_1$.

Définition 6 – Partie

Une *partie* sur un tel graphe est un chemin s_0, s_1, s_2, ..., possiblement infini, sur ce graphe. À chaque fois, si c'est possible, le joueur contrôlant le sommet choisit un arc vers un autre sommet. Si ce n'est pas possible, la partie s'arrête.

Exemple 7

On reprend le graphe de l'exemple 2. Donner :

— la position de départ : $s_0 = \dots$

— $S_1 = \dots$

— $S_2 = \dots$

— un exemple de partie : ...

En pratique, on ne considèrera que des parties finies. Cela est assuré si le graphe représentant le jeu est fini et acyclique.

Définition 8 – Position finale

On appelle *position finale* ou *état final* un sommet qui n'est le départ d'aucun arc (on dit aussi qu'un tel sommet n'admet pas de successeur ou qu'il est de degré sortant égal à 0).

Si la partie parvient à une position finale, le joueur contrôlant ce sommet ne peut plus jouer et perd donc la partie (ou la gagne, ça peut dépendre des règles du jeu).

Exemple 9

Dans le jeu de l'exemple 2, le sommet 1_a est un état final perdant pour J_1 et le sommet 1_b est un état final perdant pour J_2.

Plus généralement, comme on s'intéresse à des jeux d'accessibilité, ces états finaux (sommets sans successeur) sont répartis dans trois ensembles :

— V_1 : ensemble des sommets qui sont un état final gagnant pour J_1 ;

— V_2 : ensemble des sommets qui sont un état final gagnant pour J_2 ;

— N : ensemble des sommets qui sont un état final correspondant à un match nul.

Exemple 10

Toujours avec le jeu de l'exemple 2, on a $V_1 = \{1_b\}$, $V_2 = \{1_a\}$ et $N = \varnothing$.

3 Quelques exemples

Jeu de Marienbad

Le jeu de Marienbad est une variante du jeu de Nim, plus exactement la somme de quatre jeux de Nim. Au départ, il y a quatre tas constitués respectivement de une, trois, cinq et sept allumettes. À tour de rôle, chaque joueur enlève des allumettes dans un seul tas (au moins une, pas de maximum). Le joueur qui prend la dernière allumette perd la partie.

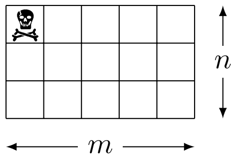
En représentant la position avec un quadruplet et en indiquant en gras le tas dans lequel des allumettes ont été prélevées, voici un exemple de début de partie (on ne distingue pas les positions entre les deux joueurs pour simplifier la représentation) :

$$\boxed{(1,3,5,7)} \longrightarrow \boxed{(1,3,5,\mathbf{4})} \longrightarrow \boxed{(1,3,\mathbf{0},4)} \longrightarrow \boxed{(1,3,0,\mathbf{3})} \longrightarrow \boxed{(1,\mathbf{1},0,3)}$$

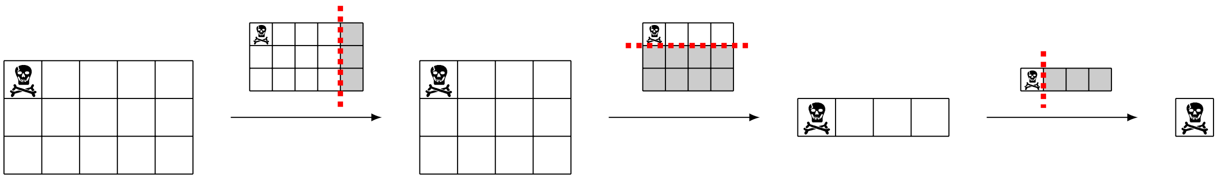
Vous pouvez y jouer là : `http://tagorlapie.fr/marienbad/` (il y a même une explication de la stratégie à suivre pour gagner).

Chomp ou le jeu du chocolat empoisonné

Dans ce jeu, on dispose d'une tablette de chocolat rectangulaire composée de n lignes et m colonnes. Le carré situé sur la première ligne de la première colonne est empoisonné : le joueur qui le mangera perdra.

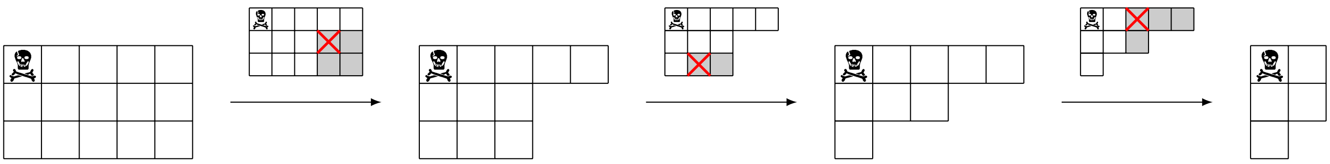


À tour de rôle, les deux joueurs coupent la tablette suivant une verticale ou une horizontale et mange les colonnes à droite ou les lignes en dessous de cette découpe. La partie se termine lorsqu'il ne reste que le carré empoisonné car le joueur doit alors le manger et perdre la partie. Par exemple :



Une variante de ce jeu, plus intéressante, consiste non à découper la tablette selon une verticale ou une horizontale mais à choisir un carré et à manger ce carré et tous ceux situés en bas et à droite de celui-ci. Autrement dit, si la tablette est de dimension (n, m) et si le joueur choisit le carré (a, b) (avec $1 \leqslant a \leqslant n$ et $1 \leqslant b \leqslant m$), il mange tous les carrés (p, q) tels que $p \geqslant a$ et $q \geqslant b$.

Voici un exemple de début de partie avec au départ une tablette de dimension $(3, 5)$ et où sont choisis successivement les carrés $(2, 4)$ puis $(3, 2)$ et enfin $(1, 3)$.

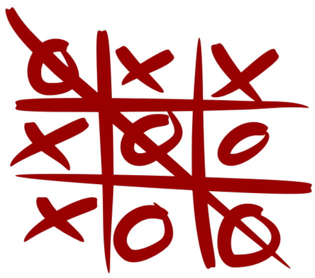


Vous pouvez jouer à cette version du jeu (à ceci près que le carré empoisonné est situé en bas à gauche) :

- `https://www.geogebra.org/m/HSwgnXjn` à deux (ou contre vous-même) sur une grille 3×8 ;
- `http://jeux-et-mathematiques.davalan.org/jeux/nim/chomp/index.html` contre la machine sur une grille dont vous pouvez choisir les dimensions.

Morpion

Dans le jeu du morpion (ou tic-tac-toe en anglais), chaque joueur dispose d'un symbole (généralement **x** et **o**) et à tour de rôle le place dans l'une des cases vides d'une grille carrée de neuf cases. Le gagnant est le premier à obtenir une ligne, une colonne ou une diagonale avec trois fois son symbole. Il y a match nul s'il n'y a aucun alignement lorsque la grille est remplie.
À symétries et rotations près, il existe 765 positions différentes et 26 830 parties possibles.



$\rightsquigarrow$ exercices 3 et 4

4 Stratégies et stratégies gagnantes

4.1 Définitions

Pour tous ces jeux, un joueur pourrait souhaiter optimiser ses coups afin de maximiser ses chances de gagner. C'est l'idée de définir une stratégie : savoir quoi jouer dans chaque position. On se limitera à des stratégies positionnelles, *i.e.* qui ne prennent en compte que la position actuelle, le sommet du graphe où l'on se trouve (c'est une stratégie sans mémoire).

Définition 11 – Stratégie

Soit (G, S_1, S_2) une arène. Une *stratégie* pour J_1 est une fonction $f\colon S_1 \to S_2$ telle que pour tout sommet $s \in S_1$ qui n'est pas un état final, $(s, f(s))$ est un arc de G.
On dit que le joueur J_1 suit la stratégie f lors d'une partie $s_0, s_1, s_2, \dots, s_n$ si pour tout $j \in [\![0\,;n-1]\!]$, si $s_j \in S_1$ alors $s_{j+1} = f(s_j)$. Autrement dit, à chaque fois que c'est à lui de jouer (et qu'il peut jouer), J_1 choisit le sommet donné par la stratégie f.
On définit de manière analogue une stratégie pour le joueur J_2.

Exemple 12

Dans le jeu de Nim, une stratégie possible est de toujours prendre un seul bâtonnet.

Définition 13 – Stratégie gagnante

Soit (G, S_1, S_2) une arène. Une stratégie f est dite *gagnante* pour le joueur i ($i \in \{1, 2\}$) depuis la position de départ s_0 si tout partie jouée depuis s_0 pendant laquelle le joueur J_i respecte la stratégie f mène à une victoire pour J_i, *i.e.* à un sommet de V_i (et ce quels que soient les coups joués par son adversaire).

Exemple 14

La stratégie décrite dans l'exemple précédent n'est évidemment pas une stratégie gagnante (penser au cas où il ne resterait que deux bâtonnets).

Remarque. On peut généraliser cette définition :

— Une stratégie gagnante peut n'être définie que sur une partie des sommets, cf exemple suivant.

— On peut aussi définir une stratégie gagnante à partir d'un sommet $s \in S$ donné (et pas seulement à partir de s_0).

Définition 15 – Position gagnante

Un sommet $s \in S$ est une *position gagnante* pour le joueur J_i ($i \in \{1, 2\}$) s'il possède une stratégie gagnante à partir de ce sommet.

4.2 Détermination d'une stratégie gagnante

Pour construire une stratégie gagnante, on doit déterminer les positions gagnantes. Considérons un jeu donné par son arène et déterminons une stratégie gagnante pour J_1. Pour cela on part de la fin et on « remonte » le graphe.

Tout d'abord, les éléments de V_1 (sommets qui sont des positions finales gagnantes pour J_1) sont par définition des positions gagnantes pour J_1. Ensuite on distingue deux cas suivant si c'est à J_1 ou à J_2 de jouer :

— un sommet $x \in S_1$ (c'est à J_1 de jouer) est une position gagnante pour J_1 s'il *existe* un arc vers une position gagnante y pour lui (car il suffit alors de jouer en y) ;

— un sommet $x \in S_2$ (c'est à J_2 de jouer) est une position gagnante pour J_1 si *tous* les arcs provenant de x aboutissent à une position gagnante pour J_1 (*i.e.* le joueur J_2 n'a pas d'autre choix que de jouer vers une position gagnante pour J_1).

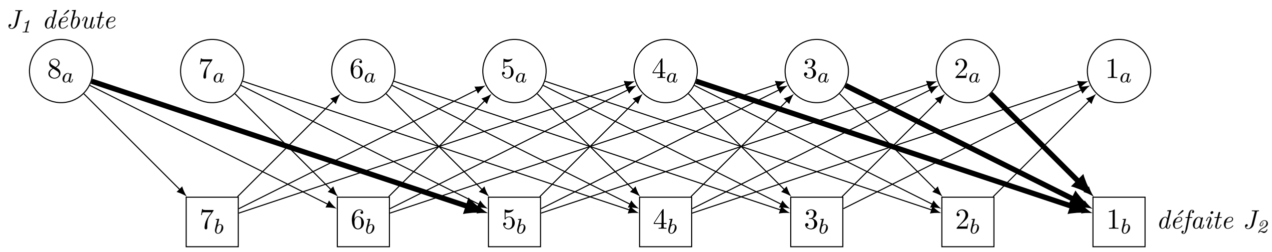
En itérant ce procédé de proche en proche, on détermine l'ensemble des positions gagnantes pour J_1. En particulier, si le sommet de départ s_0 fait partie de cet ensemble de positions gagnantes pour J_1, celui-ci possède une stratégie gagnante.

4.3 Exemple avec le jeu des bâtonnets

Reprenons à nouveau le jeu des bâtonnets dont le graphe est donné dans l'exemple 2 et cherchons une stratégie gagnante pour J_1 en analysant le graphe depuis la fin :

1. Le sommet 1_b est une position finale perdante pour J_2 et donc une position finale gagnante pour J_1 (avec les notations précédentes, $1_b \in V_1$).
2. On peut y parvenir depuis les sommets 2_a, 3_a et 4_a qui sont donc des positions gagnantes pour J_1 (la stratégie consiste simplement à choisir l'arc menant à 1_b).
3. Remarquons alors que 5_b n'est relié qu'à ses trois sommets, ainsi si la partie passe par 5_b, J_2 est obligé de choisir un arc menant à une position gagnante pour J_1. Par conséquent le sommet 5_b est une position perdante[4] pour J_2.
4. La position de départ 8_a étant reliée à 5_b, il suffit au joueur J_1 de choisir l'arc les reliant.

En résumé, J_1 possède une stratégie gagnante (depuis la position de départ 8_a). Celle-ci est donnée par les arcs en gras dans le graphe suivant :



Plus généralement, en itérant ce raisonnement, on peut montrer que les positions avec $4n+1$ bâtonnets ($n \in \mathbb{N}$) sont perdantes pour le joueur qui doit jouer. Ainsi si le nombre de bâtonnets au départ est de la forme $4n$, $4n+2$ ou $4n+3$ alors J_1 possède une stratégie gagnante, s'il est de la forme $4n+1$ alors c'est J_2 qui aura une stratégie gagnante. En particulier, à Fort Boyard, la partie débute avec 20 bâtonnets et $20 = 4 \times 5$ donc le joueur qui commence devrait toujours gagner (s'il a bien appris son cours sur les stratégies gagnantes).

4.4 Et en pratique ?

Résoudre un jeu d'accessibilité consiste à déterminer les positions gagnantes de chacun des deux joueurs et la stratégie gagnante pour chacun à partir de ces positions.

Niveau facile

Pour les jeux simples, on peut se contenter d'étudier « à la main » le graphe du jeu comme on l'a fait dans le paragraphe précédent pour le jeu des bâtonnets : on part des positions finales et on « remonte » le graphe au fur et à mesure.

$\rightsquigarrow$ exercices 5 et 6

Niveau moyen

Pour les jeux un peu plus complexes, on peut passer par le calcul des *attracteurs*, hors programme en TSI. Cela consiste à faire algorithmiquement la même chose que précédemment : pour déterminer une stratégie gagnante pour J_1, on part des positions finales gagnantes pour lui et on considère de proche en proche les sommets qui y mènent (volontairement pour J_1 et de façon forcée pour J_2) et ce jusqu'à remonter à la

4. Il ne faut pas confondre cette position perdante avec un état final perdant. En effet, on dit ici que la position est perdante pour J_2 car quel que soit son coup, J_1 pourra ensuite faire en sorte de gagner la partie s'il joue correctement.

position de départ. L'algorithme permettant ces calculs d'attracteurs repose essentiellement sur le parcours du graphe[5] du jeu.

⇝ exercice 7

Une conséquence intéressante de ce calcul des attracteurs est le résultat suivant.

Proposition 16 – Existence stratégie gagnante

Si le graphe est acyclique fini et s'il n'y a pas de possibilité de match nul, alors soit il existe une stratégie gagnante pour J_1 soit il en existe une pour J_2.

En rajoutant la possibilité de match nul, on a également des résultats concernant des stratégies pour ne pas perdre. Par exemple, on peut montrer qu'au morpion il n'existe pas de stratégie gagnante ni pour J_1 ni pour J_2 mais que chaque joueur dispose d'une stratégie lui garantissant au moins le match nul.

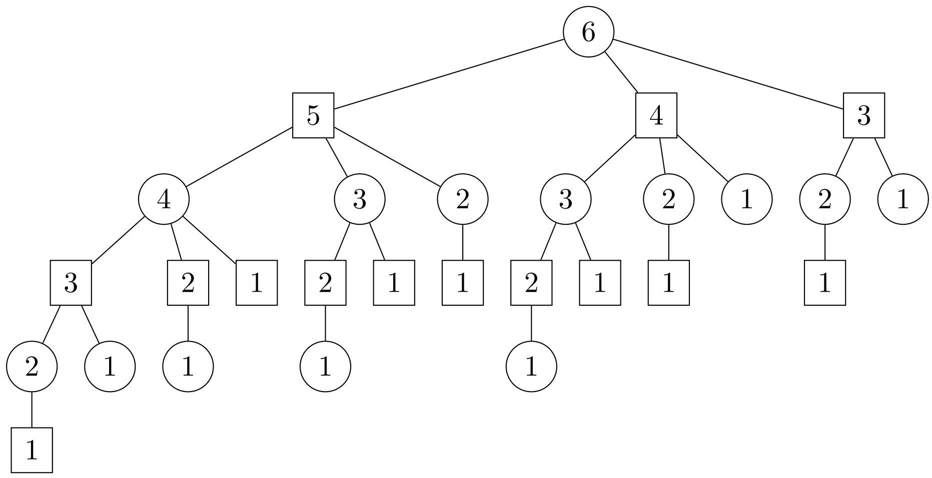
Niveau difficile

Cependant, ces calculs ne sont pas possibles en pratique dès que les jeux sont trop complexes. Pour se donner des ordres d'idées :

— au puissance 4, il y a environ $4{,}5 \times 10^{12}$ positions possibles ;
— aux échecs, il y a de l'ordre de 10^{120} parties possibles (c'est le nombre de Shannon) ;
— au go, il y a de l'ordre de 10^{170} positions possibles et très approximativement 10^{600} parties possibles.

On peut alors utiliser une autre représentation du jeu : l'arbre de décision. Il s'agit aussi d'un graphe acyclique dont les sommets (appelés *nœuds*) sont les positions et les arêtes les coups possibles. La position de départ (qui est un sommet de degré entrant nul) est appelée *racine* et les positions finales (qui sont des sommets de degré sortant nul) sont appelées *feuilles*.

Voici par exemple l'arbre de décision du jeu des bâtonnets s'il y a 6 bâtonnets au départ. On a repris la convention de l'exemple 2 pour laquelle c'est à J_1 de jouer lorsque le sommet est un cercle et à J_2 lorsque c'est un carré. Le déroulement de la partie se lit de haut en bas en suivant les arêtes.



On remarque qu'il y a autant de feuilles (ici des sommets indiquant qu'il ne reste qu'un seul bâtonnet) que de parties possibles.

Il existe alors un algorithme, appelé algorithme min-max, à nouveau hors programme en TSI, permettant d'associer à chaque sommet une valeur et d'en déduire les positions gagnantes pour un joueur.

Bien sûr, pour les jeux mentionnés au début de ce paragraphe, il n'est pas possible de parcourir entièrement l'arbre. On s'appuie alors sur une heuristique : c'est une fonction qui associe une valeur à chaque position, valeur reflétant si la partie penche plutôt vers une victoire de J_1 ou de J_2. Par exemple, aux échecs, une version naïve de l'heuristique consiste à associer une valeur à chaque pièce dont dispose encore

5. Revoir le cours de l'an dernier : parcours en largeur et en profondeur d'un graphe.

le joueur [6]. Ces valeurs sont utilisées pour éviter de parcourir certaines parties de l'arbre et ainsi réduire la taille des calculs.

Grâce à cet algorithme et ses raffinements, il a été possible de :

— résoudre entièrement le puissance 4 dès 1988 : une stratégie gagnante pour J_1 est connue et consiste à démarrer dans la colonne centrale.

— voir un ordinateur (Deep Blue) battre le champion du monde d'échecs Gary KASPAROV en 1997 (pour y parvenir, de nombreux raffinements ont été nécessaire, c'était vraiment un exploit à l'époque).

6. Classiquement 1 pour un pion, 3 pour un cavalier ou un fou, 5 pour une tour et 8 pour une dame. Cependant ce n'est pas suffisant en pratique, il faut ajouter des considérations d'occupation de l'espace, de contrôle de cases, etc. La création d'une heuristique de qualité est une tâche difficile.